Portfolioselektionstheorie grafisch und intuitiv mit GeoGebra

LUCIA DEL CHICCA, MARKUS HOHENWARTER, LINZ

In diesem Beitrag beschäftigen wir uns mit einem Optimierungsproblem aus der Finanzwelt: gegeben ein Kapital und eine Menge von Finanzprodukten, in welchen Finanzprodukt soll man am besten investieren? Diese Frage kommt aus der Portfolioselektionstheorie, die von dem Wirtschaftwissenschaftler Harry Markovitz entwickelt wurde, der für seine Theorie 1990 den Nobelpreis erhielt. Diese Aufgabenstellung wird in diesem Beitrag vor allem grafisch mit Hilfe der Software GeoGebra vorgestellt und analysiert. Diese Anwendung der Finanzmathematik für den Schulunterricht reicht dabei vom numerisch-grafischen Experiment bis hin zur tiefergehenden mathematischen Auseinandersetzung mit dem dahinterliegenden Optimierungsproblem.

1. Einführung

Banken, Finanzinstitute und Privatinvestoren stehen täglich vor folgender Herausforderung: sie haben ein Vermögen zur Verfügung und eine ganze Menge von Finanzprodukten unter denen sich für eine Investition entscheiden sollen. Bei einer solchen „Portfolioselektion“ (vgl. Sharpe & Alexander 1990) sagt einem der gesunder Menschenverstand, dass es wahrscheinlich vernünftiger ist, sein Kapital auf verschiedene Finanzprodukte zu verteilen als es nur in ein einziges zu investieren. Aber warum ergibt diese sogenannte Diversifikation eigentlich Sinn? Und wenn man sein Geld in verschiedene Produkte steckt, wie viel davon soll man in jedes einzelne investieren? Gibt es eine Kombination oder eine Menge von Kombinationen der gegebenen Finanzprodukte, die besser ist als alle anderen? Diese Fragen möchten wir im Laufe dieses Kapitels vor allem grafisch und experimentell beantworten. Dabei werden wir sehen, dass man, zumindest unter bestimmten Voraussetzungen, von „besseren“ und „schlechteren“ Investitionen sprechen kann.

Im Folgenden wollen wir zunächst den Fall zweier Finanzprodukte und später den allgemeinen Fall mehrerer Finanzprodukte grafisch analysieren. Eigentlich könnte man den Fall der Kombination von zwei Finanzprodukten mit Mitteln der Schulmathematik auch im Detail durchrechnen und beweisen. Wir möchten hier aber mit Hilfe von GeoGebra einen vorwiegend grafischen Weg gehen, um das Problem zu veranschaulichen und die Fragestellung weitgehend intuitiv und grafisch zu beantworten.

Wir haben uns für diesen Beitrag für ein Thema aus der Finanzmathematik entschieden, weil man im Mathematikunterricht immer auf der Suche nach interessanten neue anwendungsorientierten Beispielen ist. SchülerInnen ist oft auch nicht bekannt, dass die Finanzmärkte eines der größten Anwendungsgebiete der Mathematik sind.

Innerhalb der Finanzmathematik haben wir speziell dieses Thema gewählt, weil man es mit Mathematikkentnissen aus der Schule verstehen könnte. Wenn wir uns auf den Fall der Wahl unter zwei Finanzprodukten beschränken, dann können wir unsere Fragestellung allein mit Mitteln der Schulmathematik lösen. Wenn wir das Problem der Wahl unter mehr als zwei Finanzprodukten betrachten, dann fehlt uns in der Schulmathematik etwas und zwar die Methode des Lagrange Multiplikators. Mit ihrer Hilfe aber und mit der Hilfe neuer Technologien (GeoGebra) können wir diesen Fall auch verstehen und zumindest grafisch lösen. Dieses Kapitel der Finanzmathematik scheint also prädestiniert als interessantes, anwendungsorientiertes, fachübergreifendes Thema, das sich für vorwissenschaftliche Arbeiten oder Projekte eignet und in verschiedene Richtungen vertieft werden kann.

Wir werden im Folgenden einige Vereinfachungen machen und etwa nicht genauer auf bestimmte in der Praxis wichtige Punkte eingehen, zum Beispiel:

- Vereinfachende Annahmen über den Markt, die betrachtet werden sollten, um über Portfolioselektionstheorie rigoros zu sprechen.

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 47, 2014, S 17 - 32

- Eine genauere Einführung in wirtschaftliche Begriffe wie etwa: diskrete Rendite, Kurse von Finanzprodukten, Arten von Finanzprodukten, etc.

Wir werden in diesem Beitrag zunächst die Problemstellung präsentieren, dann die mathematischen Werkzeuge vorstellen, die wir verwenden werden und die zum Großteil vom Schulstoff bekannt sind, und schließlich mittelsTechnologieeinsatz (GeoGebra) die grafische Lösung unserer Fragestellung experimentell finden.

2 Trend-Volatilitäts Ansatz

Wir, die Kunden einer Bank oder auch die Finanzinstitutionen selbst, stehen vor folgender Entscheidung: wir haben ein Kapital und verschiedene Finanzprodukte zur Verfügung und müssen entscheiden, in welche dieser Anlagemöglichkeiten und deren Kombinationen wir investieren sollen.

Natürlich möchte jeder Investor eine "gute Investition" tätigen, d.h. er möchte so viel wie möglich durch seine Investition gewinnen und dabei so wenig Risiko wie möglich eingehen. Es ist also im Allgemeinen bekannt, dass es einen Zusammenhang zwischen der "Rendite", also dem Gewinn, und dem Risiko, der sogenannten "Volatilität", einer Investition gibt. Normalerweise geht man davon aus, dass ein größerer erwarteter Gewinn eines Produktes auch ein größeres Risiko mit sich bringt. Mathematisch gesehen wird also bei unserer Fragestellung jedes Finanzprodukt durch zwei Größen charakterisiert: die erwartete Rendite (bzw. erwarteter Gewinn oder Trend) und die Volatilität.

Die erwartete Rendite, die wir im Folgenden mit μ bezeichnen wollen, wird von Statistikern oder Finanzanalysten zum Beispiel aus historischen Daten des Produktes berechnet oder geschätzt und dann veröffentlicht. Sie entspricht dem geschätzten Wert, den das Finanzprodukt zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft, z.B. in einem Jahr, mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit haben wird.

Die Volatilität, die wir im Folgenden mit bezeichnen und ebenfalls basierend auf statistischen Berechnungen veröffentlich wird, stellt das Risikomaß eines Finanzproduktes dar. Im Folgenden werden wir auf die Bedeutung dieser Größen näher eingehen.

Ein Produkt mit Volatilität gleich Null ist ein "risikoloses" Produkt. Ein risikoloses Produkt in unserem Zusammenhang ist zum Beispiel ein Sparbuch mit fixem Zinssatz. Risikolos heißt also nicht, dass das Produkt völlig ohne Risiko ist, weil auch ein Sparbuch nur so sicher wie die dahinterstehende Bank ist. Risikolos bedeutet stattdessen, dass wir unter normalen Voraussetzungen in jedem Moment den Wert des Produktes für jeden Zeitpunkt in der Zukunft exakt berechnen können. Deswegen hat ein risikoloses Produkt Volatilität gleich Null, weil wir mit Sicherheit berechnen können wie viel wir für eine bestimmte Investition in ein Sparbuch zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft bekommen werden.

Im Gegensatz dazu steht ein "risikobehaftetes Finanzprodukt", bei dem wir gegenwärtig nicht exakt berechnen können, welchen Wert es zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft haben wird. Grund dafür ist, dass sein Wert von verschiedenen Faktoren abhängt, welche wir nicht kennen. Aktien sind ein bekanntes Beispiel dafür. Für eine Aktie können wir heute mit Hilfe von historischen Daten oder anderen Indikatoren nur schätzen, welchen Wert wir zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft erwarten können. Die Volatilität sagt uns, mit welcher Abweichung vom erwarteten Wert wir durchschnittlich zu rechnen haben. Im Folgenden werden wir zu Vereinfachung immer "Aktien" statt "risikobehaftetes Finanzprodukt" sagen. Unsere Betrachtungen gelten aber natürlich auch für viele andere Finanzprodukte.

Der Zusammenhang zwischen erwarteter Rendite und Risiko eines Finanzproduktes kann durch das im Folgenden vorgestellte Trend-Volatilität Diagramm veranschaulicht werden. Dazu nehmen wir an, vier Aktien zur Verfügung zu haben. Von jeder dieser Aktien kennen wir die erwartete Rendite und ihre Volatilität. Diese Daten sind in folgender Tabelle zusammengefasst.[1]

Aktie	Volatilität (σ)	Erwartete Rendite / Trend (μ)
Coca Cola	0,05	0,01
Telekom Austria	0,07	0,03
Siemens	0,09	0,35
Apple	0,09	0,4

Sehen wir uns zum Beispiel die erste Zeile an: eine erwartete Rendite von 0,1 für die Coca Cola Aktie heißt in Prozent ausgedrückt 10%. Genauso kann auch die Volatilität σ in Prozent ausgedrückt werden: 0,05 entspricht also 5%. Das bedeutet, dass man im kommenden Jahr für die Coca Cola Aktie einen Gewinn von 10% mit einer durchschnittlicher Abweichung von 5% erwartet, also einen Gewinn im Bereich von voraussichtlich 5% bis 15%.

Wir können also jeder Aktie $\mathrm{A_i}$ ein Paar (σ_i, μ_i) zuordnen und sie in einem Trend-Volatilitäts-Diagramm folgendermaßen darstellen (siehe Abbildung 1). Aus dem Diagramm mit der Volatilität auf der x-Achse und der erwarteten Rendite auf der y-Achse, können wir ablesen, dass die Aktien von Siemens und Apple im Moment das gleiche Risiko aufweisen, aber bei Apple eine höhere Rendite zu erwarten ist als bei Siemens. In diesem Fall sollte jeder Investor sinnvollerweise die Apple Aktie bevorzugen. Wir können also sagen, dass die Apple Aktie im Moment „besser“ als die Siemens Aktie ist bzw. eine bessere Prognose hat als die Siemens Aktie.

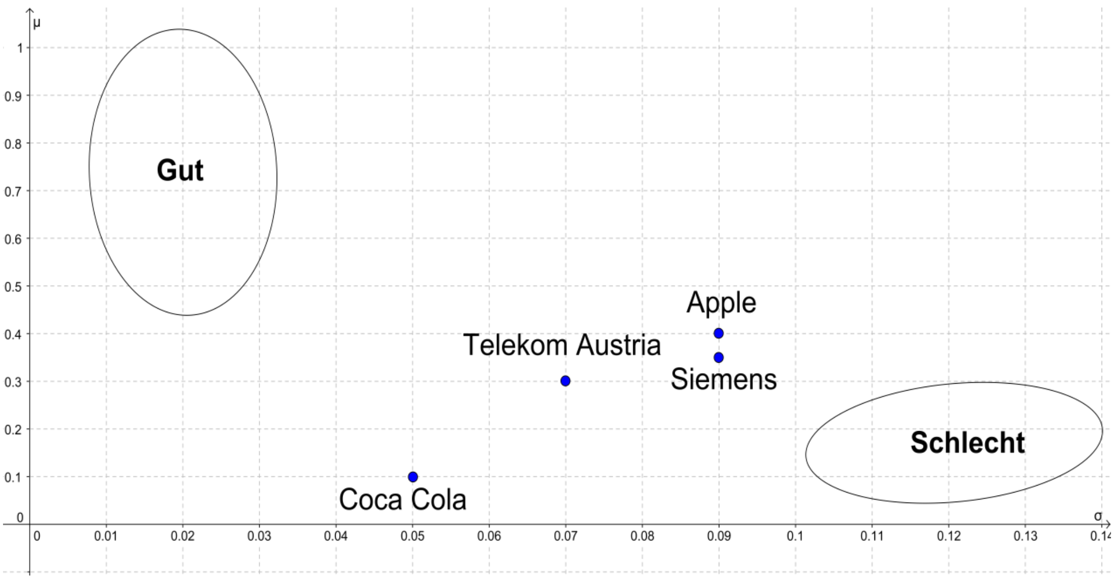

Abb. 1: Aktien im Trend-Volatilitäts-Diagramm

[1] Diese und weitere Werte in diesem Beitrag sind zwar mögliche realistische Werte aber entsprechen nicht aktuellen tatsächlichen Daten dieser Aktien.

Wenn wir jedoch die Coca Cola und die Telekom Aktien vergleichen, dann sehen wir, dass die erste im Moment eine geringere Gewinnerwartung und geringere Volatilität als die Zweite aufweist. Welche der beiden Aktien ist in diesem Fall besser? Das kann man nicht so leicht beantworten: manche Investoren sind risikoscheu und bevorzugen eine Kombination von geringerer erwarteter Rendite bei weniger Risiko und manche sind risikofreudig und bevorzugen eine höhere erwartete Rendite bei einem gleichzeitig höheren Risiko. In diesem Fall kann man also nicht eindeutig sagen, dass eine Aktie besser ist als die andere. Die endgültige Auswahl, welche Investition zu bevorzugen ist, hängt von der persönlichen Risikofreudigkeit des einzelnen Investors ab.

Bis hierher können wir wie folgt zusammenfassen: In Hinsicht auf den Trend–Volatilitäts-Ansatz können wir in manchen Fällen bereits klar sagen, dass eine Investition in eine Aktie zu bevorzugen ist als in eine andere. Wie sieht es aber mit Kombinationen von Finanzprodukten aus?

3 Kombinationen von Aktien

Eine Kombination mehrerer Aktien heißt in der Banker-Sprache ein „Portfolio". Um die erwartete Rendite und die Volatilität von Aktienportfolios zu berechnen brauchen wir noch eine weitere Größe: die Korrelation.

Die Korrelation ist ein Maß für den Zusammenhang zweier Aktien und auch sie wird von den Finanzanalysten zum Beispiel aus historischen Daten berechnet und geschätzt. Sie hat immer einen Wert zwischen -1 und 1. Eine aus historischen Daten berechnete Korrelation nahe 0 bedeutet, dass es bisher kaum einen Zusammenhang zwischen den Renditen der zwei Aktien gab. Eine Korrelation nahe 1 bzw. -1 bedeutet, dass die Kursentwicklungen der beiden Aktien im betrachteten Zeitraum sehr ähnlich bzw. völlig entgegengesetzt verlaufen sind.

Wir werden im Folgenden diese Schreibweisen verwenden:

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$: erwartete Renditen der Aktien $A_1, A_2, \dots, A_n$

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$: Volatilitäten der Aktien $A_1, A_2, \dots, A_n$

$\rho_{ij} = Korr\left(A_i, A_j\right)$: Korrelation der Aktien A_i und A_j

Betrachten wir jetzt das Portfolio Y als allgemeine Kombination der zu Verfügung stehenden Aktien. Y kann dann als formale Summe geschrieben werden als

$$Y = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n,$$

wobei x_i jeweils der in Aktie A_i investierte Anteil am verfügbaren Kapital ist. Als Nebenbedingung gilt also: $x_1 + x_2 + \dots + x_n =$ Kapital, d.h. dass die Summe der Anteile des Kapitals, die wir in die verschiedenen Aktien investieren, das investierte Gesamtkapital ergibt.

Für das Portfolio Y können die erwartete Rendite und die Volatilität durch folgende Formeln direkt berechnet werden:

$$\mu(Y) = \mu_Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = x_1 \cdot \mu_1 + x_2 \cdot \mu_2 + \dots + x_n \cdot \mu_n$$

$$Vola(Y) = \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j}$$

Das allgemeine Portfolio Y hat im Rendite-Volatilität Diagramm damit die Koordinaten $Y = (\sigma_Y, \mu_Y)$.

3.1 Was bedeuten Rendite und Volatilität in unseren Kontext eigentlich?

Die erste oben angeführte Formel der erwarteten Rendite μ_Y erinnert an die Formel des Erwartungswerts einer Summe von n Zufallsvariablen. Die zweite Formel der Volatilität σ_Y sieht nach der Wurzel der Varianz einer Summe von n Zufallsvariablen aus. Auch die verwendeten Begriffe "erwartete Rendite", "Volatilität", "Korrelation" klingen stark nach Wahrscheinlichkeitsrechnung. Wie sieht also hier der Zusammenhang mit unserer Fragestellung über Aktienportfolios aus?

Wir können diese Begriffe verwenden, weil wir die (diskrete) Rendite der Aktienkurse - also die relative Veränderung der historischen Kurse der Aktien - als Realisation einer Zufallsvariable betrachten. So gesehen sind die „erwartete Rendite“ und „Volatilität“ vom Anfang dieses Kapitels tatsächlich der Erwartungswert der Rendite und die Standardabweichung der Rendite. Das erklärt auch die Verwendung der oben angeführten Formeln. Wir wollen hier aber nicht weiter ins Detail gehen, sondern uns auf die Bedeutung dieser Begriffe für unsere Fragestellung konzentrieren und die gegebenen Formeln nur anwenden.

Kommen wir also zu unserer ursprüngliche Fragestellung zurück: Wo befinden sich nun alle möglichen Portfolios Y aus unserer Menge von Aktien in einem Trend-Volatilitäts Diagramm? Können wir grafisch herausfinden, ob manche eine bessere Investition darstellen als andere?

3.2 Kombination aus zwei Aktien

Schauen wir uns diese Frage zunächst einmal für Portfolios von nur 2 Aktien an. Wir haben ein Kapital in Höhe von 1 Million Euro zur Verfügung (das haben wir im Lotto gewonnen) und möchten es in folgende beide Aktien investieren:

Aktie	Volatilität σ	Erwartete Rendite bzw Trend μ
IBM	$\sigma_1 = 0{,}15$	$\mu_1 = 0{,}1$
Lufthansa	$\sigma_2 = 0{,}3$	$\mu_2 = 0{,}25$

Außerdem kennen wir vom Banker unserer Wahl auch die Korrelation der beiden Aktien: $\rho_{12} = 0{,}02$. Das allgemeine Portfolio Y hat hier die Form:

$$Y = x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2$$

die wir wegen unserer Nebenbedingung $x_1 + x_2 = 1$ Million auch als

$$Y = t \cdot A_1 + (1-t) \cdot A_2$$

mit $t = x_1$ und $1 - t = x_2$ schreiben können, wenn wir fortan 1 Million Euro als Einheit betrachten.

Für die erwartete Rendite und die Volatilität des Portfolios ergeben sich durch Verwendung der oben genannten Formeln die Koordinaten von Y im Trend-Volatilitäts-Diagramm als

$$Y = \left(\sqrt{t^2 \cdot \sigma_1^2 + (1-t)^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot t \cdot (1-t) \cdot \rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2}\,,\ t \cdot \mu_1 + (1-t) \cdot \mu_2\right).$$

Wo liegen diese Aktienkombinationen im Diagramm?

Wir können jetzt ein Paar Zahlenbeispiele machen, indem wir fixe Werte für t bzw. für $1-t$ wählen. Damit berechnen wir die Portfolios und sehen wo sich diese im Trend-Volatilitäts-Diagramm befinden. Dabei können wir uns von GeoGebra helfen lassen, um viele „zufällige" Portfolios zu generieren. Als erstes erzeugen wir dafür mittels $random()$ einen Wert für t zwischen 0 und 1, der das Gewicht der Aktie A_1darstellt, also den Kapitalanteil, der in A_1 investiert wird. Dementsprechend ist $(1-t)$ das Gewicht der Aktie A_2, d.h. der Kapitalanteil, der in A_2 investiert wird. Das allgemeine Portfolio Y mit obigen Gewichten kann jetzt leicht von GeoGebra berechnet werden. Durch Einschalten der $Spur$ des zufälligen Portfoliopunktes Y und mit Hilfe der Tastenkombination $Strg + R$ für $Alle\ Objekte\ neu\ berechnen$ können wir den Zufallspunkt variieren lassen und schnell eine große Anzahl möglicher Kombinationen im Trend-Volatilitäts-Diagramm eintragen (siehe Abbildung 2).

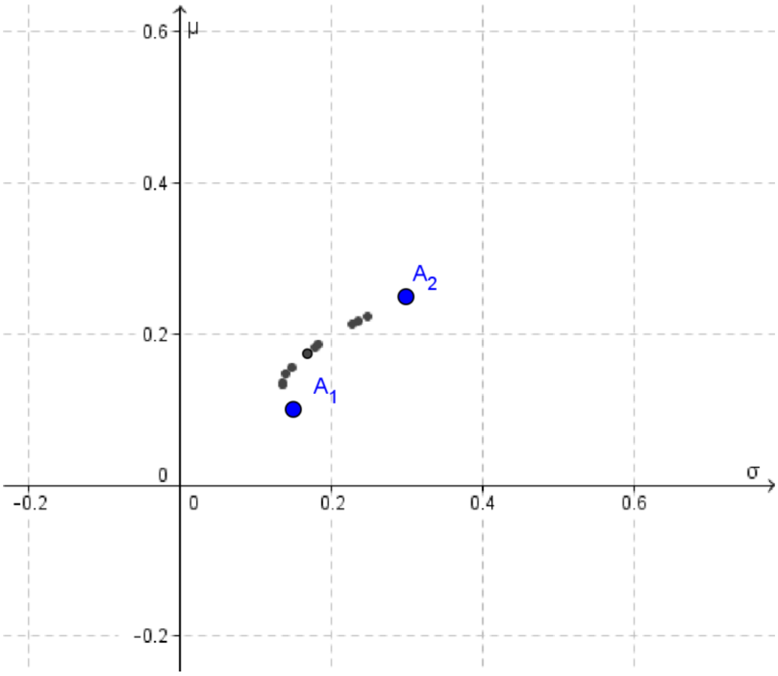

Abb. 2: Zufällig-generierte Portfolios von A_1und A_2

Durch das automatische Generieren einer großen Anzahl von Parameterwerten zwischen 0 und 1 entsteht eine Kurve zwischen den beiden Aktien von IBM und Lufthansa, d.h. alle Kombinationen dieser beiden Aktien. Wir haben also den Verdacht, dass alle Portfolios aus den zwei Aktien auf einer konvexen Kurve zwischen den beiden Aktien liegen. Dazu einige Bemerkungen:

- Interessant ist, dass man in der Finanzmathematik im Allgemeinen auch Anteile des Kapitals außerhalb des Intervalls [0,1] betrachtet, da in der Realität in gewissem Umfang auch Short-Selling (Leerverkäufe) zulässig ist. Das heißt, dass t auch Werte kleiner als 0 bzw. größer als 1 annehmen kann. Dadurch ergibt sich im Allgemeinen eine konvexe Kurve, die über A_1 und A_2 hinausgeht. (siehe folgende Abbildung 3)

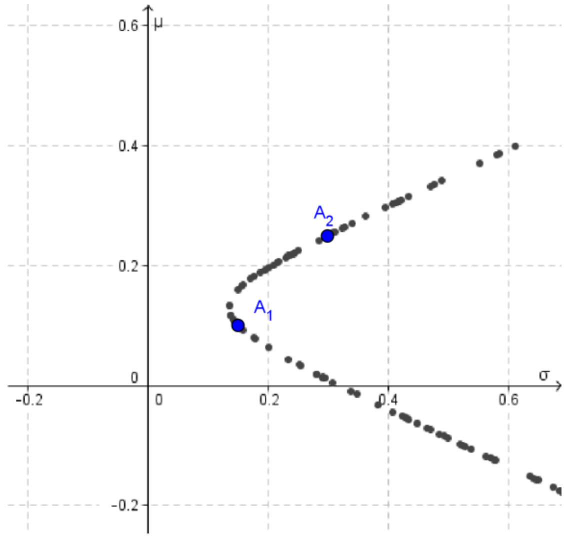

Abb. 3: Zufällig-generierte Portfolios von A_1und A_2mit Short Selling

- Wir sind durch das zufällige Generieren von Kapitalanteilen zu dem Schluss gekommen, dass alle Mögliche Portfolios aus beiden Aktien auf einer konvexen Kurve liegen. Wir gehen hier nicht auf die Details ein, möchten aber erwähnen, dass es sich tatsächlich um den Ast einer Hyperbel handelt. Der entsprechende Beweis kann ohne große Schwierigkeiten auch mit den Mathematikkentnissen der Oberstufe durchgeführt werden.
- Wir haben in unserem Beispiel einen fixen Wert für ρ gewählt, nämlich ρ=0,02. Was würde passieren, wenn sich der Wert von ρ ändert? Das heißt was würde sich ändern wenn die beiden betrachteten Aktien stark korreliert (ρ_{12} =1 oder $\rho_{12} = -1$) wären? Das können wir in GeoGebra mit einem Schieberegler untersuchen. Wir entdecken auf diese Weise, dass für die Werte $\rho = -1$ und $\rho = 1$ zwei Spezialfälle entstehen, die in den Abbildungen 4 und 5 zu sehen sind. Für alle Werte von $0 < \rho < 1$ hingegen bilden die Portfoliokombinationen, wie schon von $\rho_{12} = 0{,}02$ vermutet, eine konvexe Kurve die mehr oder weniger „gebogen" ist und zwischen den beiden Spezialfälle liegt.

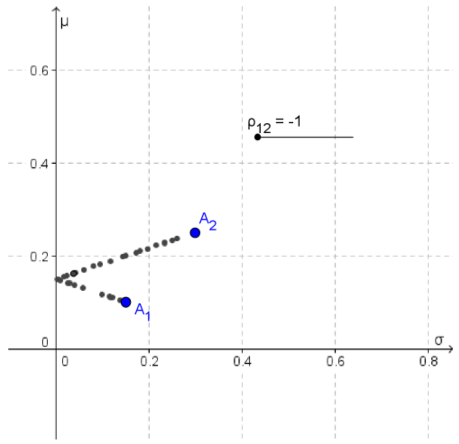

Abb. 4: Kombinationen von A_1und A_2 mit $\rho = -1$

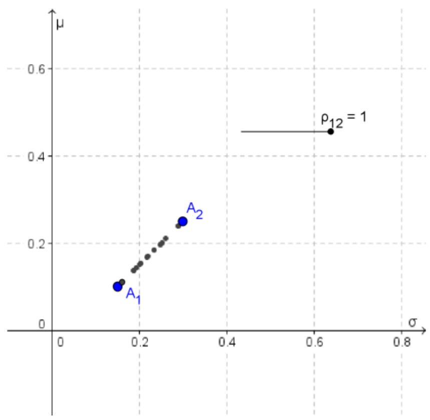

Abb. 5: Kombinationen von A_1und A_2 mit $\rho = 1$

3.3 Opportunity Set und Efficient Border

Die Menge aller möglichen Kombinationen der zwei gegebenen Aktien heißt "Opportunity Set" und ist also eine konvexe Kurve. Unter allen diesen Portfolios des Opportunity Set gibt es eines, das für uns besonders interessant ist: nämlich jenes mit minimaler Volatilität, also dem geringsten Risiko. Dieses Portfolio bezeichnen wir nun mit Y_0. In unserem Beispiel bekommt man es bei einer Investition von etwa 78% seines Kapitals in IBM Aktien A_1 und von 22% in Lufthansa Aktie A_2. Die erwartete Rendite liegt bei ca. 13%, die Volatilität allerdings auch. Damit liegt der erwartete Gewinn von Y_0 voraussichtlich im Bereich zwischen 0% und 26%.

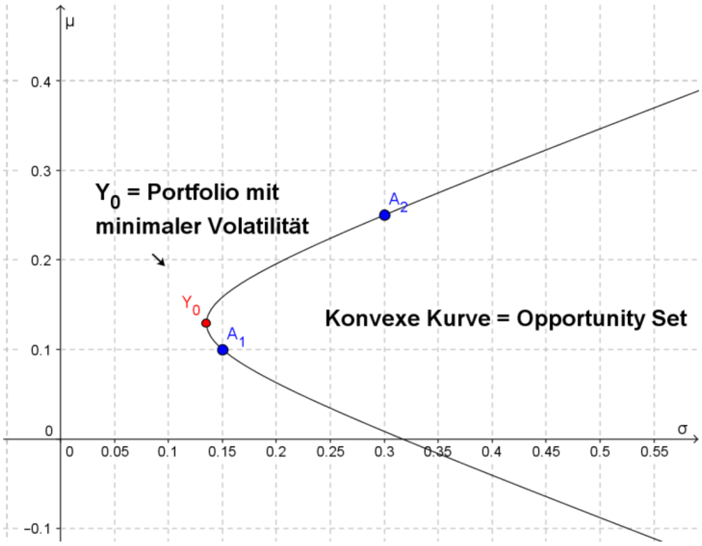

Abb. 6: Opportunity Set der Kombination von 2 Aktien

Y_0 teilt unsere Kurve in zwei Teile, einen oberen und einen unteren Teil. Für jedes Portfolio auf dem unteren Teil der Kurve gibt es ein Portfolio auf dem oberen Teil, welches die gleiche Volatilität, also das gleiche Risiko, aber eine größere erwartete Rendite hat. Der obere Teil der Kurve heißt daher "Efficient Border" (Effizienzlinie, siehe Abbildung 6). Dort befinden sich die besten Portfolios unter allen möglichen Kombinationen der beiden Aktien.

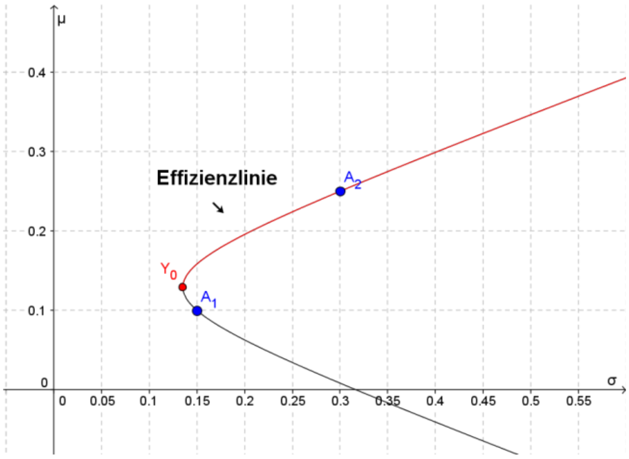

Abb. 7: Efficient Border der Kombination der 2 Aktien A_1 und A_2

Gibt es unter den Portfolios auf der Effizienzlinie nun eines, das am besten für uns ist? Nein, eine Investition in jedes dieser Portfolios auf der Effizienzlinie ist eine sinnvolle Wahl. Welches Portfolio man genau wählt, hängt von der persönlichen Risikobereitschaft des einzelnen Investors ab.

4. Kombination von mehreren Aktien

Was verändert sich, wenn wir Portfolios mit mehr als zwei Aktien betrachten? Wie im Fall von zwei Finanzprodukten wollen wir uns das zunächst grafisch anschauen, um zu sehen, wo sich mögliche Portfolios im Trend-Volatilitäts Diagramm befinden und wie das Opportunity Set jetzt aussieht. Starten wir z.B. mit 5 Aktien A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 und wiederum mit einem Gesamtkapital in der Höhe von 1 Million Euro. Wir verwenden erneut folgende Schreibweisen:

Y ist die allgemeine Kombination von A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sind die Anteile am Kapital für die verschiedenen Aktien

$\mu(Y) = \sum_{i=1}^{5} x_i \mu_i = x_1 \cdot \mu_1 + x_2 \cdot \mu_2 + x_3 \cdot \mu_3 + x_4 \cdot \mu_4 + x_5 \cdot \mu_5$ ist die erwartete Rendite von Y

$\sigma(Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1, j\neq i}^{5} x_i \cdot x_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j}$ ist die Volatilität von Y

Die Werte der erwarteten Rendite und der Volatilität jedes einzelnen Produktes sind in folgender Tabelle gegeben.

Finanzprodukt $(\boldsymbol{A_i})$	Volatilität	Erwartete Rendite
A_1	0,15	0,10
A_2	0,3	0,25
A_3	0,25	0,20
A_4	0,28	0,13
A_5	0,20	0,17

Zusätzlich kennen wir die Korrelationen von je zwei verschiedenen Produkten, die sich wie folgt als Korrelationsmatrix schreiben lassen:

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} & \rho_{35} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} & \rho_{45} \\ \rho_{51} & \rho_{52} & \rho_{53} & \rho_{54} & \rho_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}3 & 0{,}01 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 1 & 0{,}1 & 0{,}04 & 0{,}08 \\ 0{,}01 & 0{,}1 & 1 & 0{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}15 & 0{,}04 & 0{,}03 & 1 & 0{,}07 \\ 0{,}2 & 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}07 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Korrelationsmatrix ist symmetrisch, weil der Zusammenhang von je zwei Aktien A_i, A_j symmetrisch ist für alle i und j. Die Elemente der Diagonal sind alle 1, weil die Korrelation einer Aktie mit sich selbst maximal ist.

Um verschiedene Portfolios zu betrachten, schauen wir uns wieder verschiedene Investitionsanteile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 an, wobei das Gesamtkapital natürlich auch hier unsere Nebenbedingung $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$ Million Euro erfüllen muss.

4.1 Graphisches Darstellen des Opportunity Set

Wir möchten uns nun wieder mit Hilfe von GeoGebra ein Bild des Opportunity Sets, also der Menge aller möglichen Kombinationen der Portfolios unserer fünf Aktien im Trend-Volatilitäts-Diagramm, machen.

Dazu wollen wir die Portfolios für eine große Anzahl von zufällig gewählten Investitionsanteilen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 als Punkte einzeichnen. Als erstes generieren wir dafür wieder mittels $random()$ eine Liste mit fünf Zufallszahlen $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$ zwischen -1 und 1. Wir erlauben negative Werte, da wir gleich den allgemeinen Fall, also mit Leerverkäufen, betrachten wollen. Damit können wir uns dann unsere zufälligen Investitionsanteile x_i berechnen, deren Summe 1 Million Euro ergeben muss:

$$x_1 = \frac{r_1}{(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5)}, \dots, x_5 = \frac{r_5}{(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5)}.$$

Diese x_i sind die Gewichte des Portfolios, also die Kapitalanteile, die in Aktie A_i investiert werden. Das allgemeine Portfolio Y hat nun die Koordinaten

$$Y = \big(\sigma(Y), \mu(Y)\big) = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1, j\neq i}^{5} x_i \cdot x_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j}, \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \mu_i\right),$$

die wir mit Hilfe von GeoGebra berechnen können. Für eine detaillierte Erklärung, wie man das in GeoGebra machen kann, siehe Del Chicca & Hohenwarter 2014.

Durch Einschalten der Spur des zufälligen Portfoliopunktes Y und mit Hilfe der Tastenkombination $Strg + R$ für $Alle\ Objekte\ neu\ berechnen$ können wir den Zufallspunkt variieren lassen und schnell eine große Anzahl möglicher Kombinationen im Rendite-Volatilitäts-Diagramm eintragen (siehe Abbildung 8).

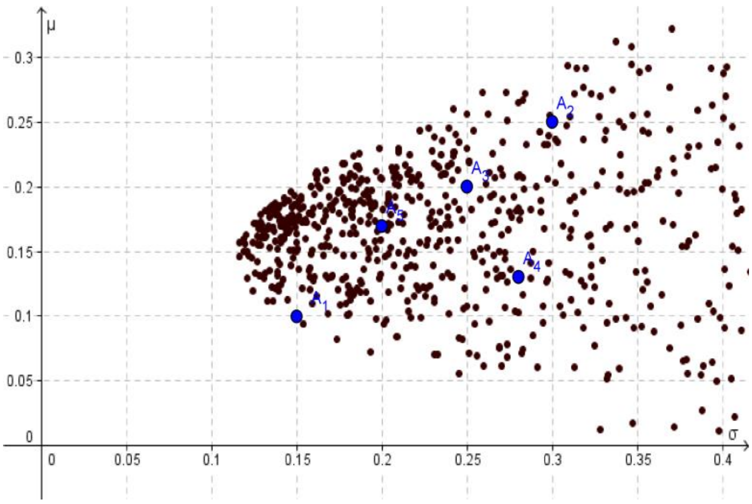

Abb. 8: Opportunity Set der Kombination der 5 Aktien

Wir sehen, dass die Portfolios von fünf Aktien nicht mehr auf einer Kurve liegen, sondern eine Fläche bilden. Wenn wir immer mehr zufällige Kombinationen unserer Aktien erzeugen, dann wird die in Abbildung 7 skizzierte Fläche immer mehr gefüllt.

Wie in unserem Beispiel gilt auch im Allgemeinen, dass das Opportunity Set der Kombinationen von mehreren Finanzprodukten eine konvexe Fläche ist. Die „besten" Portfolios sind in diesem Fall jene, die am oberen Rand der Fläche liegen, weil es kein Portfolio gibt, das eine höhere Rendite und eine niedrigere Volatilität aufweist. Zu jedem Portfolio, das nicht auf dem oberen Rand des Opportunity Sets liegt, gibt es ein Portfolio auf dem oberen Rand, das bei gleicher Volatilität einen höheren erwarteten Trend aufweist. Wieder heißt der oberen Rand der Fläche Efficient Border bzw. Effizienzlinie.

4.2 Portfolio mit minimaler Volatilität und Effizienzlinie

Wir wollen jetzt die Effizienzlinie für unser Beispiel mit den fünf Aktien explizit berechnen und zeichnen. Dazu brauchen wir zunächst das Portfolio Y_0 mit minimaler Volatilität.

Um Y_0 zu finden, müssen wir für das allgemeine Portfolio Y die Volatilität $\sigma(Y)$ minimieren:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1, j \neq i}^{5} x_i \cdot x_j \cdot \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j},$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$

die uns versichert, dass die Summe der investierten Anteile genau unser Kapital (1 Million Euro) ergibt. Dazu genügt es, den Ausdruck unter der Wurzel unter Berücksichtigung der Nebenbedingung zu minimieren. Wir bemerken, dass in diesen beiden Ausdrücken die Gewichte der Aktien $x_i, i = 1, \ldots, 5$ die Unbekannten sind. Wenn wir diese bestimmen, können wir dann die Volatilität und den Trend des Portfolios Y_0 finden, d.h. einen Punkt in unserem Koordinatensystem.

Danach wollen wir eine Parameterdarstellung der Effizienzlinie finden und diese als Kurve zeichnen. Dazu gehen wir folgendermaßen vor: von allen möglichen Portfolios Y mit allgemeiner Rendite μ wollen wir zuerst jene mit minimaler Volatilität finden. Damit bekommen wir alle Portfolios am Rand des Opportunity Sets. Unter diesen wählen wir dann diejenigen, deren Rendite größer ist als μ_0, die Rendite des Portfolios mit minimaler Volatilität.

Das heißt, wir wollen wieder ein Minimum für den Ausdruck der Volatilität finden, aber diesmal mit zwei Nebenbedingungen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

und die Nebenbedingung für die Rendite

$$x_1 \cdot \mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3 + x_4\mu_4 + x_5\mu_5 = \mu.$$

Wir bemerken, dass wieder die Gewichte der Aktien $x_i, i = 1, \ldots, 5$ die Unbekannten sind aber in diesem Fall sind sie in Abhängigkeit von μ, also $x_i(\mu), i = 1, \ldots, 5$. Wenn wir $\mu > \mu_0$als Parameter laufen lassen, bekommen wir die ganze Effizienzlinie.

Um diese beiden Ziele zu erreichen, also Y_0 zu finden und die Effizienzlinie zu zeichnen, stehen wir vor der gleichen Schwierigkeit: wir müssen einen Ausdruck mit einer bzw. zwei Nebenbedingungen minimieren.

Dies kann man mit Hilfe der Methode des Lagrange-Multiplikators machen, die eine Methode zur Bestimmung lokaler Extrema unter eine oder mehrere Nebenbedingungen darstellt. Eine vereinfachte Version der Methode des Lagrange-Multiplikators kann man z.B. in Sydsaeter und Hammond (2004) finden. Die Lösungen, die Gewichte jeder Aktie für das Portfolio mit minimaler Volatilität und die $x_i(\mu), i = 1, \dots, 5$ für die Parameterdarstellung, bekommt man durch Lösen eines Gleichungssystems der partiellen Ableitungen der sogenannten Lagrange Funktion und der Nebenbedingungen.

Die Umsetzung dieser Methode mit Papier und Bleistift ist für drei Finanzprodukte mühsam, aber noch erträglich. Für unser Beispiel mit fünf Aktien empfiehlt sich aber in jedem Fall der Einsatz eines Computeralgebrasystems (CAS). Für eine detaillierte Vorstellung der Lösung mit der CAS Ansicht von GeoGebra siehe Del Chicca & Hohenwarter 2014. Hier beschränken wir uns auf die grafische Darstellung.

Die Lösung des ersten Gleichungssystems liefert uns die Gewichte des Portfolios mit minimaler Volatilität. Wenn wir diese in die Koordinaten des allgemeinen Portfolios einsetzen, bekommen wir das Portfolio mit minimaler Volatilität, in unserem Beispiel (siehe Abbildung 9): $Y_0 = (0{,}113214;\ 0{,}142862)$.

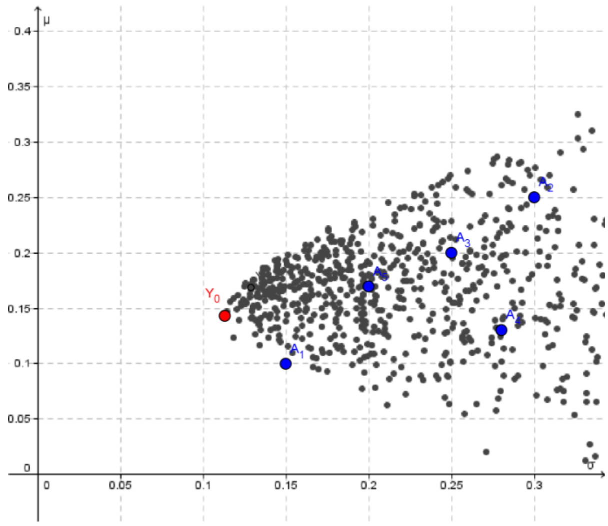

Abb.9: Opportunity Set und Portfolio mit minimaler Volatilität unserer 5 Aktien

Die Lösung des zweiten Gleichungssystems für die Variablen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ist abhängig von einem Parameter μ und wir erhalten wieder mit Hilfe der Ansicht CAS von GeoGebra die Parametergleichung

$$effBorder(\mu) =$$
$$(3.162277660168\mathrm{sqrt}(6.926130583551\,(10^{30})\,\mu^2 - 1.978966896214\,(10^{30})\,\mu + 1.734033216941\,(10^{29}))\,2\,(10\text{^}(-16))\,,\mu).$$

Wenn wir jetzt μ variieren lassen mit $\mu \geq \mu_0$, dann können wir die Effizienzlinie als Parameterkurve zeichnen (siehe Abbildung 10).

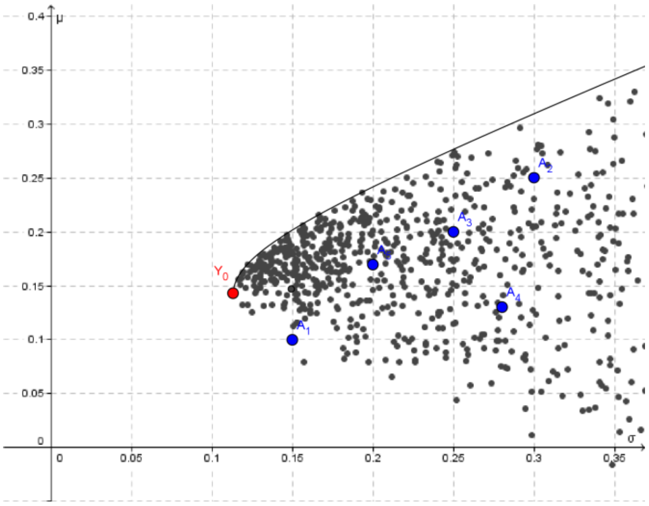

Abb.10: Effizienzlinie der Portfolios der gegebenen 5 Aktien

Wir wissen schon, dass die besten Kombinationen der 5 Aktien auf der Effizienzlinie liegen und können uns wieder fragen, ob es hier ein Portfolio gibt, das eindeutig das Beste ist? Die Antwort lautet wie im Fall von zwei Aktien ebenfalls „nein“. Eine Investition in jedes dieser Portfolios auf der Effizienzlinie ist eine sinnvolle Wahl. Wie man sich entscheidet, hängt auch hier von der persönlichen Risikobereitschaft des einzelnen Investors ab.

5. Kombination von Aktien und einem Sparbuch

Wie ändert sich unser Problem wenn wir ein Sparbuch, also ein risikoloses Finanzprodukt, zu unseren fünf Aktien hinzufügen? Nehmen wir z. B. ein Sparbuch S mit Zinssatz 3%. Seine Koordinaten im Trend-Volatilitäts-Diagramm sind $(\sigma_S, \mu_S) = (0; 0{,}03)$, das heißt es liegt auf der μ-Achse. Wir wissen bereits, dass die besten Aktienportfolios auf der Effizienzlinie liegen, also brauchen wir nur die Kombinationen von allen diesen Portfolios mit dem Sparbuch zu betrachten. Wir schauen uns also $Y = (\sigma_Y, \mu_Y)$ als allgemeines Portfolio auf der Effizienzlinie und kombinieren es mit dem Sparbuch. Wo liegen alle möglichen Kombinationen zwischen Y und S?

Wir gehen vor genau wie in den anderen Fällen und lassen „GeoGebra“ zufällig Gewichte generieren als Anteile des Kapitals jetzt im Sparbuch und in einem Portfolio Y auf dem Efficient Border.

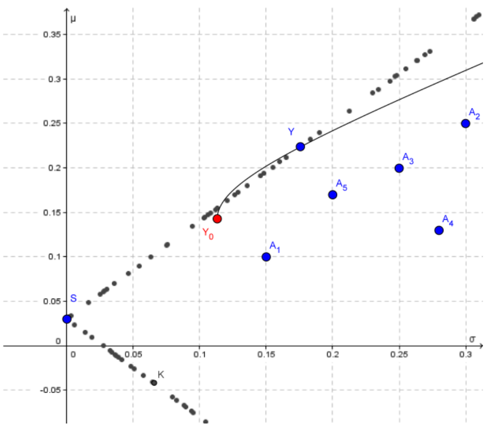

Abb.11: Mögliche Kombinationen von einem Portfolio auf dem Efficient Border und Sparbuch S

Alle Kombinationen liegen auf den zwei Strecken (vlg. Abb. 11). Wir akzeptieren in der Abbildung wieder Werte der Kapitalanteile kleiner als 0 und größer als 1 aber es ist offensichtlich, dass für unsere Zwecke, nach der gleichen Bemerkung wie vorher, nur der Strahl von S durch Y interessant ist. Wenn wir S mit allen Portfolios auf der Effizienzlinie kombinieren, dann ergibt sich wieder eine Fläche von möglichen Kombinationen (siehe Abb. 12).

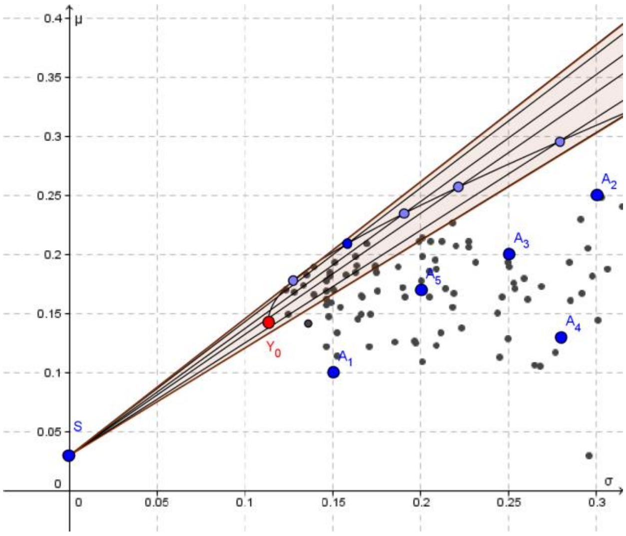

Abb.12: Kombinationen des Sparbuchs S mit verschiedenen Aktienportfolios auf der Effizienzlinie

Für diesen Bereich suchen wir wieder die Kombinationen mit geringster Volatilität bei gleicher Rendite oder, anders gesagt, die Kombinationen mit höchster Rendite beim gleichen Risiko. Das sind nun offensichtlich gerade jene Kombinationen, die auf dem Strahl durch S mit größtmöglicher Steigung liegen. Dieser Strahl ist die Tangente von S an die Kurve und er ist die "neue Effizienzline" der Kombination der 5 Aktien mit dem Sparbuch. Das heißt für uns, dass es auf der Kurve eine eindeutige Kombination der fünf Aktien gibt, die am besten dazu geeignet ist, mit einem Sparbuch kombiniert zu werden. Diese Kombination heißt „Market Portfolio“ und ist das Portfolio am Berührungspunkt der Tangente aus S an die Kurve (siehe Abbildung 13). Das Market Portfolio hat in unserem Beispiel die Koordinaten $MP = (0.132184, 0.183854)$.

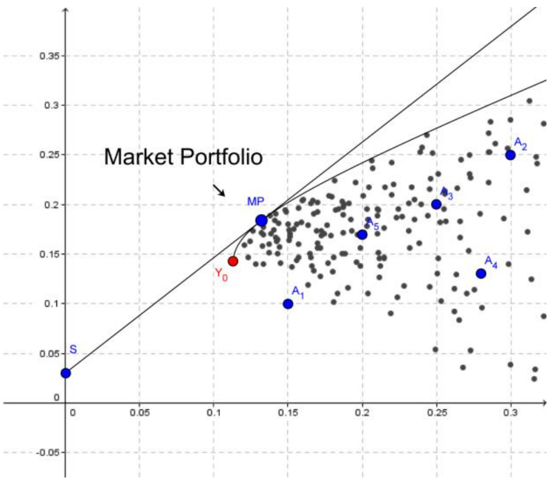

Abb.13: Market Portfolio und neue Effizienzlinie

Interessanterweise gibt es also für alle Investoren, die in eine Kombination von Aktien und einem Sparbuch investieren wollen, mit dem Market Portfolio tatsächlich genau eine beste Wahl für die Kombination der Aktien.

Es bleibt noch eine Frage offen: wie teilen wir unser Kapital jetzt zwischen Sparbuch und dem Aktienportfolio? Alle Kombinationen von Sparbuch und Market Portfolio liegen auf dem Strahl durch die beiden. Welche dieser Kombinationen am besten ist, d. h. welcher Anteil des Kapitals in das Sparbuch zu investieren ist, und welcher in das Market Portfolio, ist wieder eine persönliche Entscheidung jedes Investors und hängt von seiner Risikobereitschaft ab.

6 Zusammenfassung

Die hier behandelten grundlegenden Fragestellungen der Portfolioselektionstheorie lassen sich sowohl rein grafisch-experimentell als auch mathematisch genauer mit Hilfe von GeoGebra untersuchen. In diesem Beitrag haben wir dabei den Schwerpunkt auf eine grafisch-experimentelle Herangehensweise gewählt. Besonders interessant ist aus unserer Sicht, dass an diesen Beispielen ersichtlich wird, dass grundlegende Ideen und Begriffe der Schulmathematik wie Optimierung und Tangenten auch bei Anwendungen in der Finanzmathematik eine wichtige Rolle spielen. Wir denken daher, dass sich diese Thematik im Unterricht sowohl für kurze Ausflüge in diesen Anwendungskontext als auch für eine tiefergehende Auseinandersetzung mit mathematischen Methoden in der Finanzwelt eignet.

Literatur

Del Chicca, L.; Hohenwarter, M. (2014): Portfolioselektion mit GeoGebra – in welche Aktien soll ich investieren? In: Kaenders, R., Schmidt, R. (Hrsg.): *Mit GeoGebra mehr Mathematik verstehen*, 13-31. Stadt: Vieweg+Teubner oder Springer.

Hull, J. (2011): *Risikomanagement. Banken, Versicherungen und andere Finanzistitutionen*. 2., aktualisierte Aufl. München: Pearson.

Schnid, F.; Trede, M. (2006): *Finanzmarktstatistik*. Heidelberg: Springer.

Sharpe, W.F.; Alexander, G.J. (1990): *Investments*. USA: Prentice-Hall International Editions.

Sydsaeter, K., Hammond, P. (2004). *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*. München: Pearson Studium.

Verfasser

Lucia Del Chicca
Johannes Kepler Universität Linz
Pädagogische Hochschule Oberösterreich
Kaplanhofstraße 40
4020 Linz
lucia.delchicca@jku.at

Markus Hohenwarter
Johannes Kepler Universität Linz
Institut für Didaktik der Mathematik
Altenbergerstrasse 59
4040 Linz
markus.hohenwarter@jku.at